



Universidad Nacional
de **Entre Ríos**

Rector

Andrés Sabella

Secretario de Extensión
Universitaria y Cultura

Roberto Medici

Director EDUNER

Gustavo Esteban Martínez



»» EDUNER ««

MATEMÁTICA APLICADA
AL CÁLCULO FINANCIERO

Luis Alberto Zacarías

Mara Bravo y Pablo Rodríguez
(Colaboradores)

Tercera edición

cátedra | grado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

507	Zacarías, Luis Alberto
CDD	Matemática aplicada al cálculo financiero / Luis Alberto Zacarías ; prólogo de María Mercedes Colombo. - 3a ed. - Paraná : Universidad Nacional de Entre Ríos. UNER, 2018. 312 p. ; 24 x 17 cm. - (Cátedra)
	ISBN 978-950-698-441-0
	1. Matemática. 2. finanzas. 3. Matematica Financiera. I. Colombo, María Mercedes , prolog. II. Título.

Primera edición, 300 ejemplares, 2015.

Segunda edición, 150 ejemplares, 2017.

Primera reimpresión, 150 ejemplares, 2018.

Coordinación de la edición: Gustavo Esteban Martínez

Corrección: María Candela Suárez

Diseño gráfico de la serie: Gabriela Resett

Diseño de interior: Cecilia Barrandegui

Arte de tapa en base a la idea de Gloria Soria

© ZACARÍAS, Luis Alberto.

© EDUNER. Editorial de la Universidad Nacional de Entre Ríos
Entre Ríos, Argentina, 2018.

Andrés Pazos 406 (E3100FHJ), Paraná, Entre Ríos, Argentina
eduner@uner.edu.ar
www.eduner.uner.edu.ar

Facultad de Ciencias Económicas, Resolución C.D. N° 268/13

Queda hecho el depósito que marca la ley 11 723.

No se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor.

Su infracción está penada por las leyes 11 723 y 25 446.

Editado e impreso en Argentina

Colección Cátedra
ISBN 978-950-698-441-0

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN	11
INTRODUCCIÓN A LA TERCERA EDICIÓN	13
CAPÍTULO 1. OPERACIÓN FINANCIERA. CONCEPTOS GENERALES.....	15
1. El valor del capital	15
2. Las operaciones financieras. Clasificación	17
3. Ley financiera	18
CAPÍTULO 2. MEDIDAS DE VARIACIÓN DEL CAPITAL	21
1. Medidas de variación en operaciones de capitalización	21
1.1. Variación absoluta	22
1.2. Variación relativa	22
1.3. Variación absoluta media	23
1.4. Variación relativa media	24
2. Medidas de variación en operaciones de descuento	27
2.1. Variación absoluta.....	28
2.2. Variación relativa	28
2.3. Variación absoluta media	29
2.4. Variación relativa media.....	29
3. El descuento racional	31
4. Tasas Proporcionales y Tasas Equivalentes	35
5. Tasa Nominal Anual. Tasa Efectiva Mensual. Tasa Efectiva Anual	36
CAPÍTULO 3. OPERACIONES SIMPLES. CAPITALIZACIÓN CON FRECUENCIA DISTINTA DE UNO	39
1. Introducción	39
2. Capitalización a tasas de interés periódicas efectivas (régimen compuesto).....	40
2.1. A tasas variables	40
2.2. A tasas constantes	41
3. Capitalización a tasas de interés periódicas simples (régimen simple)	43

3.1. A tasas variables	43
3.2. A tasas constantes	45
4. Los intereses periódicos y los rendimientos efectivos en los regímenes de capitalización compuesta y de capitalización simple	48
4.1. Intereses periódicos (variación absoluta)	48
4.2. Rendimiento efectivo periódico (variación relativa)	48
5. Las tasas de interés proporcionales y las tasas de interés equivalentes en el régimen simple de capitalización	51
6. Las tasas de interés proporcionales y las tasas de interés equivalentes en el régimen compuesto de capitalización	54
7. Tasa media efectiva de interés	58
8. Convenciones sobre períodos fraccionarios de tiempo	60
9. Relación entre tasa efectiva anual de interés y tasa nominal anual vencida	62
CAPÍTULO 4. OPERACIONES SIMPLES. DESCUENTO CON FRECUENCIA DISTINTA DE UNO	67
1. Introducción	67
2. Descuento a tasas de descuento periódicas efectivas (régimen de descuento comercial compuesto)	68
3. Descuento a tasas de descuento periódicas simples (régimen de descuento comercial simple)	71
4. Las tasas de descuento proporcionales y las tasas de descuento equivalentes en el régimen simple de descuento	74
5. Las tasas de descuento proporcionales y las tasas de descuento equivalentes en el régimen compuesto de descuento	75
6. El descuento comercial y el descuento racional	77
6.1. En el régimen compuesto	77
6.2. En el régimen simple	79
7. Casos	80
CAPÍTULO 5. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO EN EL CAMPO CONTINUO	85
1. Introducción	85
2. La variación relativa media: tasa instantánea de interés	87
3. Equivalencia entre tasa efectiva y tasa instantánea de interés	87
4. Variación relativa media: la tasa instantánea de descuento	89
5. Equivalencia entre tasa efectiva y tasa instantánea de descuento	90
6. Determinación de capital final con tasa instantánea de interés	91
7. Determinación del capital actual con tasas instantáneas	93

CAPÍTULO 6. OPERACIONES FINANCIERAS SIMPLES EN UN MARCO DE INESTABILIDAD DE PRECIOS	95
1. Introducción	95
2. Estabilidad e inestabilidad de precios	96
3. Tasa de variación de precios. Factor de corrección. Número Índice	97
4. Tasa de interés y tasa de inflación. Rendimiento aparente y rendimiento real	101
5. Coeficiente de Estabilización de Referencia (CER)	105
CAPÍTULO 7. EL TRATAMIENTO DE LOS GASTOS EN OPERACIONES FINANCIERAS SIMPLES	109
1. Introducción	109
2. En las operaciones de inversión. La tasa interna de retorno (TIR)	109
3. En operaciones de financiamiento. El costo financiero total (CFT)	112
4. Tasa interna de retorno en moneda homogénea y heterogénea	114
CAPÍTULO 8. OPERACIONES COMPLEJAS. VALOR DE UN CONJUNTO DE CAPITALES	119
1. Introducción	119
2. Valor de un conjunto de capitales	120
2.1. A tasas de interés efectivas constantes	121
2.2. A tasas efectivas de descuento constantes	123
2.3. A tasas de interés simple constantes	123
2.4. A tasas de descuento simple constantes	124
3. Desplazamiento del valor del conjunto	124
4. Casos especiales: cajas de ahorro	126
5. Vencimiento común y vencimiento medio	129
6. Valor actual neto (VAN)	131
7. Cálculo de la Tasa Interna de Retorno (TIR)	134
8. Costo Financiero Total (CFT)	140
CAPÍTULO 9. RENTAS	145
1. Introducción	145
2. Concepto. Elementos. El valor de una renta en un momento del tiempo	146
3. Rentas anticipadas, constantes y temporales	148
3.1. Según la cantidad de capitales (términos) de la renta	148
3.2. Según su vinculación con hechos aleatorios	149
3.3. Según la cuantía de los capitales	149
3.4. Según el momento en que resulta exigible el capital	150

3.5. Según la relación que existe entre el momento de inicio de la renta y el momento de valoración de la misma	151
3.6. Según la ley financiera utilizada para la valoración	152
3.7. Según la relación existente entre la unidad de tiempo de la tasa de interés y la amplitud de cada período o sub-intervalo	152
4. Rentas constantes y temporales	153
4.1. Rentas inmediatas y vencidas. Valor actual	153
4.2. Rentas inmediatas y vencidas. Valor final	158
4.3. Rentas inmediatas y adelantadas. Valor actual	162
4.4. Rentas inmediatas y adelantadas. Valor final	164
4.5. Rentas diferidas y vencidas. Valor actual	165
4.6. Rentas diferidas y adelantadas. Valor actual	166
4.7. Rentas anticipadas y vencidas. Valor actual	168
4.8. Rentas anticipadas y adelantadas. Valor actual	169
5. Rentas constantes y perpetuas	173
5.1. Rentas perpetuas, inmediatas y vencidas. Valor actual	173
5.2. Rentas perpetuas, inmediatas y adelantadas. Valor actual	175
5.3. Rentas diferidas y vencidas. Valor actual	176
5.4. Rentas diferidas y adelantadas. Valor actual	176
5.5. Rentas anticipadas y vencidas. Valor actual	176
5.6. Rentas anticipadas y adelantadas. Valor actual	176
6. Rentas variables y temporales	177
6.1. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas. Valor actual	178
6.2. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas. Valor final	182
6.3. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, adelantadas. Valor actual	183
6.4. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, adelantadas. Valor final	183
6.5. Variables en progresión geométrica. Diferidas, vencidas. Valor actual	183
6.6. Variables en progresión geométrica. Diferidas, adelantadas. Valor actual	184
6.7. Variables en progresión geométrica. Anticipadas, vencidas. Valor actual	184
6.8. Variables en progresión geométrica. Anticipadas, adelantadas. Valor actual	184
6.9. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, vencidas. Valor actual	185
6.10. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, vencidas. Valor final	189
6.11. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, adelantadas. Valor actual	190
6.12. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, adelantadas. Valor final	190
6.13. Variables en progresión aritmética. Diferidas y anticipadas.....	190
7. Rentas variables y perpetuas	191
7.1. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas y adelantadas	192

7.2. Variables en progresión geométrica. Diferidas, vencidas y adelantadas	193
7.3. Variables en progresión aritmética. Inmediatas y vencidas	194
8. Problemas combinados	196
CAPÍTULO 10. PRÉSTAMOS	201
1. Concepto y clasificación	201
2. Préstamos de reembolso único con pago acumulado de intereses	202
2.1. Reconstrucción del capital	203
2.2. Cancelación anticipada	206
2.3. Reembolso parcial	207
2.4. Valor de cesión	209
3. Préstamos de reembolso único con pago periódico de intereses	210
3.1. Reconstrucción del capital	211
3.2. Cancelación anticipada	212
3.3. Reembolso parcial	213
3.4. Valor de cesión	214
3.5. Los cargos por cancelaciones anticipadas. El CFT para el deudor	215
3.6. Cláusulas de ajuste	217
4. Sistema francés de amortización (amortización progresiva de capital e intereses sobre saldos)	217
4.1. A tasa constante. Cuadro de evolución. Elementos	218
4.2. Sistema francés a tasa variable	223
4.3. Sistema francés con cláusula de ajuste	225
4.4. Sistema francés con plazo de gracia	227
4.5. Sistema francés con gastos adicionales. Determinación del CFT	228
4.6. Casos especiales: con cuotas variables	231
5. Sistema alemán de amortización (amortización constante de capital e intereses sobre saldos)	232
5.1. A tasa constante. Cuadro de evolución. Elementos	233
5.2. Sistema alemán a tasa variable	237
5.3. Sistema alemán con cláusula de ajuste	238
5.4. Con gastos adicionales. Determinación del CFT	240
6. Sistema americano	243
6.1. Determinación de la tasa de interés efectiva implícita	245
7. Préstamo a tasa directa	246
7.1. Cuadro de evolución	246
7.2. Determinación de la tasa de interés efectiva implícita	247
8. Casos combinados	249

CAPÍTULO 11. EMPRÉSTITOS	255
1. Concepto y clasificación	255
2. Elementos y simbología	256
3. Valor de cesión de un título	259
4. Valor técnico. Valor de mercado. Valor paridad	259
5. Empréstitos con títulos de vida cierta	261
5.1. Empréstitos con reembolso único y pago acumulado de intereses	261
5.2. Empréstitos con reembolso único y pago periódico de intereses	265
5.3. Empréstitos con reembolso fraccionado de parte de su valor nominal	269
5.4. Empréstitos con plazo de gracia	274
6. Empréstitos de vida aleatoria	275
6.1. Empréstitos con rescate de un número constante de títulos emitidos	275
6.2. Empréstito normal	277
6.3. Métodos para determinar la vida restante del título	280
CAPÍTULO 12. NOCIONES DE CÁLCULO ACTUARIAL	283
1. Introducción	283
2. Las tablas de mortalidad	284
2.1. Funciones biométricas fundamentales	285
2.2. Valores de conmutación	287
3. Primas y premios	288
4. Seguro de vida. Capital diferido	289
5. Rentas vitalicias. Introducción. Clasificación general	290
5.1. Rentas vitalicias completas e inmediatas	291
5.2. Rentas vitalicias completas y diferidas	293
5.3. Rentas vitalicias incompletas e inmediatas	294
5.4. Rentas vitalicias incompletas y diferidas	296
6. Seguros sobre la muerte	297
6.1. Completos o enteros e inmediatos	298
6.2. Completos o enteros y diferidos	299
6.3. Temporales	300
7. Seguros mixtos: ordinario y de capital doblado	302
8. Primas naturales y primas niveladas	303
RESPUESTAS A LOS PLANTEOS	307
BIBLIOGRAFÍA	309
AUTOR	310

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

El libro es fruto de la experiencia docente y profesional del Cr. Luis Alberto Zacarías como docente titular de la cátedra Cálculo Financiero de la carrera de Contador Público de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Entre Ríos y, tal como explica el autor en la Introducción, está destinado a servir como material de estudio a los alumnos que cursan la asignatura mencionada y también como libro de consulta para quienes sus actividades laborales o profesionales demandan una permanente actualización en temas de Cálculo Financiero y, especialmente, de las normas legales vigentes.

El texto abarca doce capítulos: Operación financiera. Conceptos generales; Medidas de variación de capital; Operaciones simples. Capitalización con frecuencia distinta de uno; Operaciones simples. Descuento con frecuencia distinta de uno; Capitalización y descuento en el campo continuo; Operaciones financieras simples en un marco de inestabilidad de precios; El tratamiento de los gastos en operaciones financieras simples; Operaciones complejas. Valor de un conjunto de capitales; Rentas; Préstamos; Empréstitos; Nociones de cálculo actuarial. La obra revela muy buena investigación bibliográfica y la preocupación del autor por implementar recursos metodológicos que favorezcan un aprendizaje significativo en sus alumnos. Ello evoca la reflexión «La Matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido».^a

Cada capítulo se inicia con el enunciado de los objetivos específicos y el listado de los temas que abarca.

Como motivación propone ejercicios o problemas cuya resolución implica la comprensión de los fundamentos teóricos involucrados y, eventual-

a. GUZMÁN, Miguel (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular.

mente, el conocimiento de las normas legales vigentes en el tiempo aludido, tales como las aplicadas por la Administración Federal de Ingresos Públicos o el Banco Central de la República Argentina con directa relación en los fundamentos del cálculo financiero.

Los contenidos son desarrollados procurando mantener una estrecha vinculación entre la teoría y sus aplicaciones. Las deducciones de las fórmulas se logran justificando el uso de operaciones y propiedades del Álgebra o del Análisis Matemático y utilizando representaciones gráficas adecuadas.

La claridad y el esmero puestos de manifiesto en este completo libro de Cálculo Financiero revelan una sincera vocación docente de su autor y permiten augurar que será muy bien recibido y aprovechado por sus estudiantes y colegas.

Junio de 2013

María Mercedes Colombo

INTRODUCCIÓN A LA TERCERA EDICIÓN

La presente obra intenta ser un compendio de los principales temas que se abordan en las cátedras universitarias de cálculo financiero o matemática financiera. Se ha estructurado en 12 capítulos introduciendo en cada uno ellos los objetivos pretendidos en su lectura.

El desarrollo de cada tema se remata con el planteo de un caso que procura ejemplificar los conceptos abordados. Consideramos que los estudiantes pueden encontrar en este libro herramientas que ayuden a comprender los temarios que se incluyen en los programas de las asignaturas incluidas en carreras de ciencias económicas; no sin observar la vinculación con la actividad profesional que deberán desplegar al momento de graduarse.

En esta tercera edición, ampliada respecto de las anteriores, se han incluido 361 nuevos casos prácticos con sus respectivas respuestas, algunos de ellos con la solución propuesta, lo que permite afianzar conocimientos y diversificar en complejidad el desarrollo de cada tema. El lector podrá abordar la lectura de cada capítulo teórico con casos ejemplificativos y optar por acceder a casos complementarios de manera digital, en el libro se encuentran debidamente indicados los apartados que disponen de casos complementarios, a los que podrá acceder haciendo uso del código QR que se encuentra en la página 14. Esto le permitirá introducirse en problemas adicionales más complejos, en cuadros de marcha para completar y en planteos para autoevaluarse.

Esta edición puede resultar de interés para los profesores de las asignaturas específicas, constituyendo una herramienta más a la que recurrir en el desarrollo de las clases. No debemos dejar de reconocer la importancia que hoy tiene el cálculo financiero en la actividad de los contadores públicos, los administradores de empresas, los licenciados en economía y demás carreras de ciencias económicas; es por ello que, modestamente, ponemos a

disposición esta obra para la actividad profesional, docente y especialmente para los estudiantes de las ciencias económicas y de la administración.

Utilice este código para acceder a los casos complementarios.

Disponibles en:

<https://eduner.uner.edu.ar/libro/174/matematica-aplicada-al-clculo-financiero/>

