

Álgebra lineal y geometría analítica

María Mercedes Colombo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

María Mercedes Colombo

Colaboradores

Ricardo J. M. Claucich

Marino Schneeberger

Néstor Jacob

Liliana Giménez

Aníbal Sattler

cátedra | grado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

515
CDD Colombo, María Mercedes
Álgebra lineal y geometría analítica / María Mercedes Colombo ;
con colaboración de Ricardo José María Claucich ... [et.al.] -
1a ed. - Paraná : Universidad Nacional de Entre Ríos. UNER, 2015.
290 p. ; 27x19 cm. (Serie Cátedra; 6)

ISBN 978-950-698-346-8

1. Álgebra Lineal. 2. Geometría Analítica.
I. Claucich, Ricardo José María , colab. II. Título

Directora de EDUNER: María Elena Lothringer

Coordinación de la edición: Gustavo Esteban Martínez

Corrección: María Candela Suárez

Corrección técnica: Ricardo Claucich

Diseño gráfico de la serie: Gabriela Reset

Diseño de interior y tapas: Cecilia Barrandegui

Gráficas: Néstor Jacob

© COLOMBO, María Mercedes

© EDUNER. Editorial de la Universidad Nacional de Entre Ríos
Entre Ríos, Argentina, 2015.

Facultad de Ingeniería, Resolución C.D. N° 237/13

Queda hecho el depósito que marca la ley 11723.

No se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor.

Su infracción está penada por las leyes 11723 y 25446.

Eva Perón 24, E3260FIB

Concepción del Uruguay, Entre Ríos, Argentina

eduner@uner.edu.ar

Impreso en Argentina

Serie cátedra

ISBN 978-950-698-346-8

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	13
PRÓLOGO	15
CAPÍTULO 1. NÚMEROS COMPLEJOS	17
1. Operaciones	20
1.1. Adición	20
1.2. Multiplicación	20
2. Forma binómica de un complejo	21
2.1. Suma y producto de dos complejos dados en forma binómica	21
2.2. Diferencia	21
2.3. Complejos conjugados	22
2.4. Cociente de dos complejos	23
2.5. Potencias de la unidad imaginaria	23
3. Representación gráfica de los números complejos	25
3.1. Forma polar del complejo	26
3.2. Forma trigonométrica	26
<i>Ejercicios resueltos</i>	32
<i>Ejercicios propuestos</i>	36
<i>Respuestas</i>	38
CAPÍTULO 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES	41
1. Sistemas de ecuaciones lineales	43
1.1. Ecuaciones lineales	43
2. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices	47
2.1. Matrices equivalentes	47
2.2. Matrices escalonadas	47
2.3. Matrices escalonadas reducidas por renglones	48
3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el Método de Gauss	48

4. Método de Gauss - Jordan	50
5. Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales	52
<i>Ejercicios resueltos</i>	55
<i>Ejercicios propuestos</i>	61
<i>Respuestas</i>	62
CAPÍTULO 3. MATRICES	63
1. Algunos tipos de matrices	66
1.1. Diferentes tipos de matrices cuadradas	67
2. Igualdad de matrices	69
3. Operaciones con matrices	69
3.1. Adición	69
3.2. Diferencia	70
3.3. Multiplicación de un número por una matriz	70
4. Vectores	71
4.1. Producto escalar de vectores	72
5. Multiplicación de matrices	73
5.1. Propiedades	75
5.2. Teorema	76
6. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales	76
7. Traspuesta de una matriz	77
7.1. Propiedades	78
7.2. Matriz simétrica	78
8. Inversa de una matriz	79
8.1. Propiedades	79
8.2. Cálculo de la matriz inversa	80
<i>Ejercicios resueltos</i>	83
<i>Ejercicios propuestos</i>	85
<i>Respuestas</i>	88
CAPÍTULO 4. DETERMINANTES	91
1. Definición de menor complementario de un elemento	93
2. Definición de determinante	94
2.1. Propiedad	95
3. Cofactor, adjunto o complemento algebraico de un elemento	96
3.1. Definición	96
3.2. Definición	96
4. Regla de Sarrus para el cálculo de un determinante de tercer orden	96
5. Propiedades	97
5.1. Propiedad	97

5.2. Propiedad	98
5.3. Propiedad	98
5.4. Propiedad	99
5.5. Propiedad	99
5.6. Propiedad	100
5.7. Propiedad	100
5.8. Propiedad	100
6. Cálculo del determinante de una matriz triangular	101
7. Determinante de la matriz identidad	102
8. Determinante de un producto de matrices	102
8.1. Propiedad	102
9. Regla de Chio	103
10. Matriz Adjunta	103
11. Cálculo de la inversa de una matriz por el método de la adjunta	104
11.1. Teorema	105
12. Resolución de ecuaciones matriciales	106
<i>Ejercicios resueltos</i>	109
<i>Ejercicios propuestos</i>	112
<i>Respuestas</i>	116

CAPÍTULO 5. VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO 119

1. Vectores en el Plano	121
1.1. Vector	121
1.2. Elementos de un vector	121
2. Operaciones con Vectores	121
2.1. Adición	121
2.2. Multiplicación de un número real por un vector	123
3. Diferencia de vectores	124
4. Dependencia lineal de vectores	124
4.1. Propiedad	124
5. Expresión cartesiana de un vector	125
5.1. Módulo de un vector	126
5.2. Ángulos directores y cosenos directores	126
6. Producto escalar de dos vectores	127
6.1. Propiedades	127
6.2. Producto escalar de dos vectores dados por sus componentes	127
6.3. Ángulo de dos Vectores	128
6.4. Proyección de un vector sobre otro	128
7. Vectores en el Espacio	129
7.1. Expresión Cartesiana de un Vector de \mathbb{R}^3	129

7.2. Paralelismo de vectores	130
7.3. Producto escalar o producto punto de dos vectores dados por sus componentes	130
7.4. Producto vectorial o producto cruz de dos vectores	131
7.5. Producto Mixto	132
<i>Ejercicios resueltos</i>	136
<i>Ejercicios propuestos</i>	139
<i>Respuestas</i>	141
CAPÍTULO 6. ESPACIOS VECTORIALES	143
1. Subespacios vectoriales	146
2. Dependencia e independencia lineal de vectores	147
2.1. Teorema	149
2.2. Teorema	149
2.3. Teorema	149
2.4. Teorema	150
2.5. Teorema fundamental de la dependencia lineal de vectores	151
2.6. Teorema	152
2.7. Teorema	152
3. Base y dimensión de un espacio vectorial	154
3.1. Teorema	155
3.2. Teorema	156
3.3. Teorema	156
3.4. Dimensión de un espacio vectorial	156
4. Espacio solución de un sistema homogéneo. Núcleo de una matriz	160
4.1. Núcleo de una matriz	161
4.2. Nulidad de una matriz	161
5. Imagen de una matriz	162
6. Espacio de renglones de una matriz	162
6.1. Rango por renglones	162
7. Espacio de columnas de una matriz	163
7.1. Rango por columnas de una matriz	163
8. Expresión vectorial de un sistema de ecuaciones lineales	167
8.1. Teorema	168
9. Cambio de base	169
9.1. Matriz de transición	171
9.2. Expresión en base B_2 de un vector dado en base B_1 (ninguna es la base canónica)	172
9.3. Bases ortonormales	173
<i>Ejercicios resueltos</i>	174

<i>Ejercicios propuestos</i>	177
<i>Respuestas</i>	179
CAPÍTULO 7. TRANSFORMACIONES LINEALES	181
1. Algunas transformaciones particulares	184
1.1. La transformación cero	184
1.2. La transformación identidad	185
1.3. La transformación de reflexión	185
1.4. Transformación de rotación	185
1.5. La transformación de proyección	187
1.6. Operador derivada	187
1.7. Operador integral	187
2. Teorema	188
3. Propiedad	189
4. Núcleo e imagen de una transformación lineal	189
4.1. Teorema	190
4.2. Nulidad y rango de una transformación lineal	191
5. Teorema	192
5.1. Teorema	194
5.2. Teorema	194
CAPÍTULO 8. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES	197
1. Una interpretación geométrica de una transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	201
2. Definición	201
3. Definición	201
4. Procedimiento para hallar los valores y vectores propios de una matriz de $n \times n$	201
4.1. Consideraciones previas	201
4.2. Polinomio característico y ecuación característica	202
5. Espacio propio	202
<i>Ejercicios resueltos</i>	205
<i>Ejercicios propuestos</i>	208
<i>Respuestas</i>	211
CAPÍTULO 9. ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL PLANO	213
1. Ecuación vectorial de la recta	215
2. Ecuaciones paramétricas	215
3. Forma simétrica	217
4. Forma implícita	217
5. Forma segmentaria	218

6. Forma explícita	219
7. Forma normal	219
8. Distancia de una recta al origen de coordenadas	220
9. Distancia de un punto a una recta	220
10. Paralelismo de rectas	221
10.1. Si las ecuaciones están dadas en forma implícita	221
10.2. Si las ecuaciones están dadas en forma explícita	222
11. Perpendicularidad de rectas	222
11.1. Si las rectas se expresan en forma implícita	222
11.2. Si las rectas están dadas en forma explícita	222
12. Intersección de rectas	223
<i>Ejercicios resueltos</i>	224
<i>Ejercicios propuestos</i>	228
<i>Respuestas</i>	231

CAPÍTULO 10. ECUACIÓN DEL PLANO

ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL ESPACIO	233
1. Ecuación del plano	235
1.1. Ecuación vectorial del plano	235
1.2. Ecuación cartesiana del plano	236
1.3. Forma segmentaria de la ecuación del plano	238
1.4. Forma normal de la ecuación del plano	239
1.5. Distancia de un plano al origen de coordenadas	240
1.6. Distancia de un punto a un plano	241
1.7. Paralelismo de planos	241
1.8. Perpendicularidad de planos	242
1.9. Ángulo de dos planos	242
2. Ecuación de la recta en el espacio	243
2.1. Ecuación vectorial	243
2.2. Ecuaciones paramétricas	243
2.3. Ecuación cartesiana de la recta en el espacio	244
<i>Ejercicios resueltos</i>	245
<i>Ejercicios propuestos</i>	251
<i>Respuestas</i>	254

CAPÍTULO 11. CÓNICAS

1. Ecuación de la circunferencia	257
1.1. Ecuaciones paramétricas	257
1.2. Ecuación cartesiana	257
1.3. Ecuación de la circunferencia con centro en (a, b)	258

1.4. Intersección de recta y circunferencia	260
1.5. Ecuación de la circunferencia determinada por tres puntos	260
2. Ecuación de la elipse	261
3. Ecuación de la hipérbola	266
4. Ecuación de la parábola	269
<i>Ejercicios resueltos</i>	270
<i>Ejercicios propuestos</i>	281
<i>Respuestas</i>	283
BIBLIOGRAFÍA	284
AUTORES	285

PRÓLOGO

Este libro está destinado a los estudiantes de las carreras de Bioingeniería y de Licenciatura en Bioinformática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos.

La asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año e integra el núcleo de las Ciencias Básicas en los planes de estudio de las respectivas carreras. Su inserción reviste valores formativo, instrumental y práctico.

Se pretende que los estudiantes alcancen una sólida base teórica y operativa para abordar con éxito, directa o indirectamente, el estudio de las otras asignaturas del área Matemática y de áreas troncales de los planes de estudio de las respectivas carreras.

El enfoque vectorial de la Geometría Analítica simplifica su comprensión y permite efectuar demostraciones y resolver problemas en forma fácil y sencilla.

Contenidos de otras áreas curriculares: Física, Química, Biología, Computación, proporcionan ejemplos prácticos relativos a situaciones y problemas susceptibles de traducirse al lenguaje matemático, aptos para ser representados mediante modelos funcionales y estudiarse aplicando el Álgebra Lineal o la Geometría Analítica y ofrecen un marco de referencia adecuado para la selección de ejercicios motivadores y problemas de aplicación que estimulen el interés por aprender.

En la actualidad, temas específicos del Álgebra Lineal: los sistemas de ecuaciones lineales, el cálculo matricial, los espacios vectoriales, las transformaciones lineales, los autovalores y los autovectores de una matriz se aplican en la formulación de modelos apropiados para el estudio de sistemas dinámicos vinculados con nuevos campos disciplinares, así como en investigaciones científicas y tecnológicas íntimamente ligados a la formación profesional de los Bioingenieros y de los Licenciados en Bioinformática.

La índole de las actividades que, se espera, pueda desarrollar con éxito un graduado, va más allá de realizar tareas de apoyo y complementación en equipos

de profesionales. También se pretende que pueda producir aportes y desarrollos innovadores, que sea capaz de crear conocimientos, técnicas, metodologías y procedimientos relacionados con su especialidad.

Asimismo, el conocimiento de los logros alcanzados por equipos de investigación en ciencias y tecnologías, integrados por docentes investigadores de diferentes universidades, sin fronteras geográficas ni ideológicas, amplían notablemente las posibilidades de perfeccionamiento e inserción laboral de nuestros graduados y, a la vez, acrecientan la incorporación de hábitos que hacen a su formación en valores éticos: cooperación, honestidad intelectual, pensamiento crítico, respeto mutuo.