

Matemática aplicada al cálculo financiero

Luis Alberto Zacarías

Segunda edición

B1		fx =TIR(A1:A4)		
	A	B	C	D
1	12.717,17	4,2991%		
2	- 5.300,00			
3	- 3.800,00			
4	- 4.700,00			
5				



Universidad Nacional
de **Entre Ríos**

Rector

Jorge A. Gerard

Secretario de Extensión
Universitaria y Cultura

Daniel De Michele

Directora EDUNER

María Elena Lothringer



»» EDUNER ««

MATEMÁTICA APLICADA
AL CÁLCULO FINANCIERO

Luis Alberto Zacarías

Segunda edición

cátedra | grado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS

510	Zacarías, Luis Alberto
CDD	Matemática aplicada al cálculo financiero / Luis Alberto Zacarías. - 2a ed. 1a reimp. - Paraná : Universidad Nacional de Entre Ríos. UNER, 2018. 270 p. ; 24 x 17 cm.
	ISBN 978-950-698-394-9
	1. Matemática. 2. finanzas. I. Título.

Primera edición, 300 ejemplares, 2015.

Segunda edición, 150 ejemplares, 2017.

Directora de EDUNER: María Elena Lothringer

Coordinación de la edición: Gustavo Esteban Martínez

Corrección: María Candela Suárez

Diseño gráfico de la serie: Gabriela Resett

Diseño de interior y tapas: Cecilia Barrantegui

© ZACARÍAS, Luis Alberto

© EDITORIAL DE LA UNER

Eva Perón 24 / E3260FIB / Concepción del Uruguay, Entre Ríos, Argentina
República Argentina, 2018.

Facultad de Ciencias Económicas, Resolución C.D. N° 268/13

Queda hecho el depósito que marca la ley 11723.

No se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor.

Su infracción está penada por las leyes 11723 y 25446.

Editado e impreso en Argentina

Colección Cátedra

ISBN 978-950-698-394-9

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	11
INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1. OPERACIÓN FINANCIERA. CONCEPTOS GENERALES.....	15
1. El valor del capital	15
2. Las operaciones financieras. Clasificación	17
3. Ley financiera	18
CAPÍTULO 2. MEDIDAS DE VARIACIÓN DEL CAPITAL	21
1. Medidas de variación en operaciones de capitalización	21
1.1. Variación absoluta	22
1.2. Variación relativa	22
1.3. Variación absoluta media	24
1.4. Variación relativa media	24
2. Medidas de variación en operaciones de descuento	28
2.1. Variación absoluta.....	28
2.2. Variación relativa	28
2.3. Variación absoluta media	29
2.4. Variación relativa media	30
3. El descuento racional	31
4. Tasas Proporcionales y Tasas Equivalentes	32
5. Tasa Nominal Anual. Tasa Efectiva Mensual. Tasa Efectiva Anual	33
CAPÍTULO 3. OPERACIONES SIMPLES. CAPITALIZACIÓN CON FRECUENCIA DISTINTA DE UNO	35
1. Introducción	35
2. Capitalización a tasas de interés periódicas efectivas (régimen compuesto).....	36
2.1. A tasas variables	36
2.2. A tasas constantes	38

3. Capitalización a tasas de interés periódicas simples (régimen simple).....	39
3.1. A tasas variables	40
3.2. A tasas constantes	41
4. Los intereses periódicos y los rendimientos efectivos en los regímenes de capitalización compuesta y de capitalización simple	43
4.1. Intereses periódicos (variación absoluta).....	43
4.2. Rendimiento efectivo periódico (variación relativa)	43
5. Las tasas de interés proporcionales y las tasas de interés equivalentes en el régimen simple de capitalización	45
6. Las tasas de interés proporcionales y las tasas de interés equivalentes en el régimen compuesto de capitalización	46
7. Tasa media efectiva de interés	48
8. Convenciones sobre períodos fraccionarios de tiempo	49
9. Relación entre tasa efectiva anual de interés y tasa nominal anual vencida	50

CAPÍTULO 4. OPERACIONES SIMPLES. DESCUENTO CON FRECUENCIA

DISTINTA DE UNO	55
1. Introducción	55
2. Descuento a tasas de descuento periódicas efectivas (régimen de descuento comercial compuesto).....	56
3. Descuento a tasas de descuento periódicas simples (régimen de descuento comercial simple)	58
4. Las tasas de descuento proporcionales y las tasas de descuento equivalentes en el régimen simple de descuento	60
5. Las tasas de descuento proporcionales y las tasas de descuento equivalentes en el régimen compuesto de descuento	61
6. El descuento comercial y el descuento racional	64
6.1. En el régimen compuesto	64
6.2. En el régimen simple	66

CAPÍTULO 5. CAPITALIZACIÓN Y DESCUENTO EN EL CAMPO CONTINUO

1. Introducción	69
2. La variación relativa media: tasa instantánea de interés	71
3. Equivalencia entre tasa efectiva y tasa instantánea de interés	71
4. Variación relativa media: la tasa instantánea de descuento	73
5. Equivalencia entre tasa efectiva y tasa instantánea de descuento.....	74
6. Determinación de capital final con tasa instantánea de interés	75
7. Determinación del capital actual con tasas instantáneas.....	77

CAPÍTULO 6. OPERACIONES FINANCIERAS SIMPLES EN UN MARCO	
DE INESTABILIDAD DE PRECIOS	79
1. Introducción	79
2. Estabilidad e inestabilidad de precios	80
3. Tasa de variación de precios. Factor de corrección. Número Índice	81
4. Tasa de interés y tasa de inflación. Rendimiento aparente y rendimiento real	84
5. Coeficiente de Estabilización de Referencia (C.E.R.)	88
CAPÍTULO 7. EL TRATAMIENTO DE LOS GASTOS EN OPERACIONES	
FINANCIERAS SIMPLES	91
1. Introducción	91
2. En las operaciones de inversión. La tasa interna de retorno (T.I.R.).....	91
3. En operaciones de financiamiento. El costo financiero total (C.F.T.).....	94
4. Tasa interna de retorno en moneda homogénea y heterogénea	95
CAPÍTULO 8. OPERACIONES COMPLEJAS. VALOR DE UN CONJUNTO DE	
CAPITALES	99
1. Introducción.....	99
2. Valor de un conjunto de capitales	100
2.1. A tasas de interés efectivas constantes	101
2.2. A tasas efectivas de descuento constantes	103
2.3. A tasas de interés simple constantes	103
2.4. A tasas de descuento simple constantes	104
3. Desplazamiento del valor del conjunto.....	104
4. Casos especiales: cajas de ahorro	106
5. Vencimiento común y vencimiento medio	108
6. Valor actual neto (V.A.N.).....	109
7. Cálculo de la Tasa Interna de Retorno (T.I.R.)	112
8. Costo Financiero Total (C.F.T.).....	115
CAPÍTULO 9. RENTAS	119
1. Introducción	119
2. Concepto. Elementos. El valor de una renta en un momento del tiempo	120
3. Clasificación de las rentas	122
3.1. Según la cantidad de capitales (términos) de la renta	122
3.2. Según su vinculación con hechos aleatorios.....	122
3.3. Según la cuantía de los capitales	123
3.4. Según el momento en que resulta exigible el capital	124

3.5. Según la relación que existe entre el momento de inicio de la renta y el momento de valoración de la misma	124
3.6. Según la ley financiera utilizada para la valoración	126
3.7. Según la relación existente entre la unidad de tiempo de la tasa de interés y la amplitud de cada período o sub-intervalo	126
4. Rentas constantes y temporales	127
4.1. Rentas inmediatas y vencidas. Valor actual	127
4.2. Rentas inmediatas y vencidas. Valor final	132
4.3. Rentas inmediatas y adelantadas. Valor actual	136
4.4. Rentas inmediatas y adelantadas. Valor final	138
4.5. Rentas diferidas y vencidas. Valor actual	139
4.6. Rentas diferidas y adelantadas. Valor actual	141
4.7. Rentas anticipadas y vencidas. Valor actual	142
4.8. Rentas anticipadas y adelantadas. Valor actual	144
5. Rentas constantes y perpetuas	146
5.1. Rentas perpetuas, inmediatas y vencidas. Valor actual	146
5.2. Rentas perpetuas, inmediatas y adelantadas. Valor actual	147
5.3. Rentas diferidas y vencidas. Valor actual	148
5.4. Rentas diferidas y adelantadas. Valor actual	148
5.5. Rentas anticipadas y vencidas. Valor actual	148
5.6. Rentas anticipadas y adelantadas. Valor actual	149
6. Rentas variables y temporales	150
6.1. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas. Valor actual	150
6.2. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas. Valor final	154
6.3. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, adelantadas. Valor actual	155
6.4. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, adelantadas. Valor final	155
6.5. Variables en progresión geométrica. Diferidas, vencidas. Valor actual	156
6.6. Variables en progresión geométrica. Diferidas, adelantadas. Valor actual	156
6.7. Variables en progresión geométrica. Anticipadas, vencidas. Valor actual	156
6.8. Variables en progresión geométrica. Anticipadas, adelantadas. Valor actual	156
6.9. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, vencidas. Valor actual	158
6.10. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, vencidas. Valor final	161
6.11. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, adelantadas. Valor actual	162
6.12. Variables en progresión aritmética. Inmediatas, adelantadas. Valor final	162
6.13. Variables en progresión aritmética. Diferidas y anticipadas.....	162
7. Rentas variables y perpetuas	163
7.1. Variables en progresión geométrica. Inmediatas, vencidas y adelantadas	163

7.2. Variables en progresión geométrica. Diferidas, vencidas y adelantadas	165
7.3. Variables en progresión aritmética. Inmediatas y vencidas	166
CAPÍTULO 10. PRÉSTAMOS	169
1. Concepto y clasificación	169
2. Préstamos de reembolso único con pago acumulado de intereses	170
2.1. Reconstrucción del capital	171
2.2. Cancelación anticipada	174
2.3. Reembolso parcial	175
2.4. Valor de cesión	176
3. Préstamos de reembolso único con pago periódico de intereses.....	178
3.1. Reconstrucción del capital	179
3.2. Cancelación anticipada	179
3.3. Reembolso parcial	180
3.4. Valor de cesión	182
3.5. Los cargos por cancelaciones anticipadas. El C.F.T. para el deudor	183
3.6. Cláusulas de ajuste	184
4. Sistema francés de amortización (amortización progresiva de capital e intereses sobre saldos)	185
4.1. A tasa constante. Cuadro de evolución. Elementos	186
4.2. Sistema francés a tasa variable	191
4.3. Sistema francés con cláusula de ajuste	193
4.4. Sistema francés con plazo de gracia	195
4.5. Sistema francés con gastos adicionales. Determinación del C.F.T	196
4.6. Casos especiales: con cuotas variables.....	199
5. Sistema alemán de amortización (amortización constante de capital e intereses sobre saldos)	200
5.1. A tasa constante. Cuadro de evolución. Elementos.....	201
5.2. Sistema alemán a tasa variable	205
5.3. Sistema alemán con cláusula de ajuste	206
5.4. Con gastos adicionales. Determinación del C.F.T	208
6. Sistema americano.....	210
6.1. Determinación de la tasa de interés efectiva implícita	211
7. Préstamo a tasa directa	212
7.1. Cuadro de evolución	213
7.2. Determinación de la tasa de interés efectiva implícita	214

CAPÍTULO 11. EMPRÉSTITOS	217
1. Concepto y clasificación	217
2. Elementos y simbología	218
3. Valor de cesión de un título	221
4. Valor técnico. Valor de mercado. Valor paridad	221
5. Empréstitos con títulos de vida cierta	223
5.1. Empréstitos con reembolso único y pago acumulado de intereses	223
5.2. Empréstitos con reembolso único y pago periódico de intereses	227
5.3. Empréstitos con reembolso fraccionado de parte de su valor nominal	231
5.4. Empréstitos con plazo de gracia	234
6. Empréstitos de vida aleatoria	236
6.1. Empréstitos con rescate de un número constante de títulos emitidos	236
6.2. Empréstito normal	238
6.3. Métodos para determinar la vida restante del título	240
CAPÍTULO 12. NOCIONES DE CÁLCULO ACTUARIAL	243
1. Introducción	243
2. Las tablas de mortalidad	244
2.1. Funciones biométricas fundamentales	245
2.2. Valores de conmutación	247
3. Primas y premios	248
4. Seguro de vida. Capital diferido	248
5. Rentas vitalicias. Introducción. Clasificación general	250
5.1. Rentas vitalicias completas e inmediatas	251
5.2. Rentas vitalicias completas y diferidas	253
5.3. Rentas vitalicias incompletas e inmediatas	254
5.4. Rentas vitalicias incompletas y diferidas	256
6. Seguros sobre la muerte	257
6.1. Completos o enteros e inmediatos	258
6.2. Completos o enteros y diferidos	259
6.3. Temporales	260
7. Seguros mixtos: ordinario y de capital doblado	262
8. Primas naturales y primas niveladas	263
BIBLIOGRAFÍA	267
AUTOR	268

PRÓLOGO

El libro es fruto de la experiencia docente y profesional del Cr. Luis Alberto Zacarías como docente titular de la cátedra Cálculo Financiero de la carrera de Contador Público de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Entre Ríos y, tal como explica el autor en la Introducción, está destinado a servir como material de estudio a los alumnos que cursan la asignatura mencionada y también como libro de consulta para quienes sus actividades laborales o profesionales demandan una permanente actualización en temas de Cálculo Financiero y, especialmente, de las normas legales vigentes.

El texto abarca doce capítulos: Operación financiera. Conceptos generales; Medidas de variación de capital; Operaciones simples. Capitalización con frecuencia distinta de uno; Operaciones simples. Descuento con frecuencia distinta de uno; Capitalización y descuento en el campo continuo; Operaciones financieras simples en un marco de inestabilidad de precios; El tratamiento de los gastos en operaciones financieras simples; Operaciones complejas. Valor de un conjunto de capitales; Rentas; Préstamos; Empréstitos; Nociones de cálculo actuarial. La obra revela muy buena investigación bibliográfica y la preocupación del autor por implementar recursos metodológicos que favorezcan un aprendizaje significativo en sus alumnos. Ello evoca la reflexión “La Matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido”.¹

Cada capítulo se inicia con el enunciado de los objetivos específicos y el listado de los temas que abarca.

Como motivación propone ejercicios o problemas cuya resolución implica la comprensión de los fundamentos teóricos involucrados y, eventual-

1. GUZMÁN, Miguel (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular.

mente, el conocimiento de las normas legales vigentes en el tiempo aludido, tales como las aplicadas por la Administración Federal de Ingresos Públicos o el Banco Central de la República Argentina con directa relación en los fundamentos del cálculo financiero.

Los contenidos son desarrollados procurando mantener una estrecha vinculación entre la teoría y sus aplicaciones. Las deducciones de las fórmulas se logran justificando el uso de operaciones y propiedades del Álgebra o del Análisis Matemático y utilizando representaciones gráficas adecuadas.

La claridad y el esmero puestos de manifiesto en este completo libro de Cálculo Financiero revelan una sincera vocación docente de su autor y permiten augurar que será muy bien recibido y aprovechado por sus estudiantes y colegas.

Junio de 2013

María Mercedes Colombo

INTRODUCCIÓN

La presente obra intenta ser un compendio de los principales temas que se abordan en las cátedras universitarias de cálculo financiero o matemática financiera. Se ha estructurado en 12 capítulos introduciendo en cada uno de ellos los objetivos pretendidos en su lectura.

El desarrollo de cada tema se remata con el planteo de un caso que procura ejemplificar los conceptos abordados. Consideramos que los estudiantes pueden encontrar en este libro herramientas que ayuden a comprender los temarios que se incluyen en los programas de las asignaturas incluidas en carreras de ciencias económicas; no sin observar la vinculación con la actividad profesional que deberán desplegar al momento de graduarse.

También puede resultar de interés para los profesores de las asignaturas específicas, constituyendo un repositorio al que recurrir en el desarrollo de las clases. No debemos dejar de reconocer la importancia que hoy tiene el cálculo financiero en la actividad de los contadores públicos, los administradores de empresas, los licenciados en economía y demás carreras de ciencias económicas; es por ello que, modestamente, ponemos a disposición esta obra para la actividad profesional y docente.